VISUALIZACIÓN EN R^2 DEL PROBLEMA DE VALORES PROPIOS: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA USANDO MATLAB

Egle Elisabet Haye, María Elina Díaz Lozano
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
ehaye@fich1.unl.edu.ar, mdiazlo@gmail.com
Nivel universitario

Palabras clave: Valores y vectores propios. Geometría. Visualización con Matlab.

Resumen
El presente trabajo forma parte de un proyecto de investigación, destinado al estudio de los posibles aportes y eventuales limitaciones que ofrece la incorporación de elementos visuales para el aprendizaje de temas de matemática de los alumnos de primer año.
Se presenta una propuesta que busca mejorar la comprensión de los conceptos relacionados con valores propios en R^2, por medio de la visualización de los aspectos geométricos del problema. En este sentido, se describen las actividades didácticas en laboratorio para los estudiantes que cursan la asignatura Álgebra Lineal en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la UNL, con la utilización de herramientas computacionales como el Matlab, haciendo uso de "eigenimágenes" y la ventana interactiva "eigshow" como auxiliares visuales en el estudio del tema.

Fundamentación de la propuesta

En las clases destinadas a temas de Álgebra Lineal, es frecuente que el docente dedique la mayor parte de su tarea a formular definiciones y presentar propiedades, procedimientos y técnicas que los alumnos replican de forma automática, en detrimento de procesos más formativos como el análisis, la generalización, la deducción y la visualización de los conceptos.

Como alternativa a una forma de enseñanza tradicional basada exclusivamente en procedimientos analíticos, la teoría de las representaciones semióticas (Dubal, 1999a, 1999b) sirvió de base para la elaboración de argumentos y propuestas tendientes a apreciar los efectos positivos de la diversificación de los lenguajes en el proceso de construcción de nociones en matemática. Sustentado en ello, en este trabajo se busca la comprensión por medio del abordaje de actividades en los que se visualizan aspectos geométricos del problema de valores propios en R^2. Trabajando sobre matrices reales de 2x2, se puede remitir el tema a un espacio familiar a los estudiantes, tal como el espacio de vectores planos. Los ejemplos contextualizados en esa dimensión, posibilitarán que los alumnos adviertan con facilidad las propiedades de proporcionalidad, colinealidad, etc. y ello los ayude a comprender posteriormente los conceptos del tema extendido a espacios más generales.

La representación visual de las nociones, muchas veces jerarquizada como herramienta para la construcción de significados en el proceso de aprendizaje, recibió tratamiento desde diversos enfoques en varias disciplinas. Al respecto, se analizan, entre otros aspectos, la diversidad de usos de las imágenes en relación con la enseñanza (Otero, Moreira & Greca, 2002; Villagra, 1999), su relación con las representaciones internas y modelos mentales (Johnson Laird, 1996 ; Kosslyn, 1980), las limitaciones y beneficios de la enseñanza por medio de lo visual y sus posibilidades en la enseñanza de Matemática (Castro & Castro, 1997; Davis, 1993; Dreyfus, 1992; Dubal, 1999).

En la actualidad "hay un alto consenso entre investigadores y especialistas relativo a que el desarrollo de las capacidades que caracterizan el pensamiento visual proporciona a los alumnos nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas." (Castro & Castro, 1997, p.99). Sobre esta base, uno de los objetivos de nuestra propuesta fue inducir al análisis de las propiedades esenciales de los conceptos por medio de la relación de figuras geométricas con la formulación algorítmica de tales propiedades. Así, por medio de gráficas sencillas en el plano, se muestran los "efectos" de una matriz o un operador sobre sus vectores propios, se ponen de manifiesto los valores propios y el estudiante puede asociar y articular la formulación y procedimientos algorítmicos con los registros en el contexto geométrico.

Como es sabido, la capacidad de las llamadas Nuevas Tecnologías para la producción de imágenes visuales, simulaciones, animaciones y entornos interactivos de aprendizaje, motivó, desde hace varios años, el interés de los estudiosos de la educación en la relación entre aprendizaje, visualización y medios informáticos (Álvarez & Guasch, 2006; García Barneto & Gil Martín, 2006; Macías Ferrer, 2007). En Algebra Lineal los software con capacidades matriciales como el Matlab, utilizados de manera adecuada, pueden enriquecer la experiencia de aprendizaje del problema de valores propios, permitiéndole al alumno, optimizar su intuición geométrica a partir de la visualización de representaciones particulares de difícil construcción en lápiz y papel, reforzar su vinculación con los conceptos teóricos, explorar y descubrir relaciones y propiedades**,** además de ayudarlo en cálculos tediosos.

Descripción de la propuesta

En la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la U.N.L. se dicta la asignatura *Álgebra Lineal* en el segundo cuatrimestre del primer año para todas las carreras de ingeniería.

Los contenidos que abarca son: espacios vectoriales, independencia lineal, espacio generado, base y dimensión, espacios con producto interno, espacios asociados a una matriz, transformaciones lineales y finalmente valores y vectores propios de una matriz. Su dictado consta de una clase teórica y otra clase práctica, ambas semanales en aula, y cuatro clases de práctica en laboratorio informático que se distribuyen en todo el cuatrimestre, en la que el software utilizado es Matlab, programa muy específico para cálculos matriciales.

Con Matlab se pueden hacer operaciones con matrices, usar funciones propias relacionadas con los conceptos de determinantes, inversa, valores propios, polinomios característicos, gráficas, aplicaciones interactivas, como también construir algoritmos con el lenguaje propio de programación.

El principal objetivo de nuestra propuesta es aprovechar esta herramienta informática como recurso didáctico que contribuya a reforzar los conceptos y aplicaciones aprendidos en el aula y motive al alumno, a través de esquemas visuales y actividades interactivas, a la observación, experimentación, discusión y descubrimiento de resultados importantes, como la interpretación geométrica del problema de valores propios en el plano.

Inspirados en Kosslyn (1980) para el caso de matrices reales de 2 x 2, una manera de pensar geométricamente acerca de los vectores propios (y visualmente muy interesante) es dibujar x y Ax uno tras otro, o dicho de otra manera, "cabeza con cola". Si x es un vector propio correspondiente al valor propio λ, también lo será cualquier múltiplo no nulo de x. Así, si queremos buscar vectores propios de manera geométrica, solamente necesitamos considerar el efecto de A sobre vectores unitarios. Este tipo de figuras en donde simultáneamente graficamos un vector unitario *u* cualquiera con punto inicial en el origen y unido a él, A*u* desde el punto terminal de *u* como se observa en el siguiente esquema, se expone en (Schonefeld, 1996) y son llamados *eigenpictures*, que traducimos como "eigenimágenes".

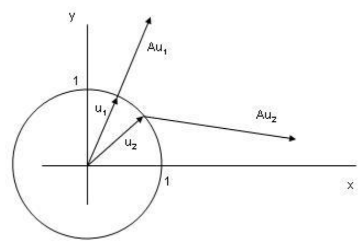

Figura 1: Esquema de una eigenimagen

Usando programación con lenguaje propio de Matlab, fue posible diseñar un algoritmo (de tipo función) generador de una eigenimagen, para que el alumno pueda implementarlo en la clase de laboratorio. Esta función recibe como argumento una matriz real A cualquiera de 2 x 2 y devuelve la gráfica de la eigenimagen de dicha matriz. Internamente la función genera y dibuja, además de la circunferencia unitaria, una sucesión de vectores unitarios x con punto inicial en el origen (de color azul) de la forma x = [cos θ, sen θ] con θ medido en radianes y luego dibuja a partir de la terminación de cada x el vector Ax correspondiente (de color rojo) como un segmento dirigido con punto inicial en x y punto final en x + Ax.

La Figura 2 muestra las eigenimágenes de las matrices $A = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ (izquierda) y $B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (derecha) con valores propios reales distintos. Sobre los rayos que indican las flechas se encuentran los vectores propios unitarios en color azul. Se observa que la matriz A tiene dos valores propios positivos y que en el primer cuadrante, el largo de Ax es aproximadamente el doble de x mientras que en el cuarto cuadrante es aproximadamente la mitad. Efectivamente los valores propios son λ_1=2 y λ_2= 1/2. Similarmente, en la eigenimagen de la matriz B se observa un valor propio positivo en el primer cuadrante (correspondiente a λ_1=5/4) pero en el cuarto cuadrante hay un valor propio negativo ya que Ax (con longitud aproximadamente igual a la mitad de x) está representado sobre x y en el interior de la circunferencia, indicando ésto que x y Ax tienen direcciones opuestas y que λ_2= - 1/2.

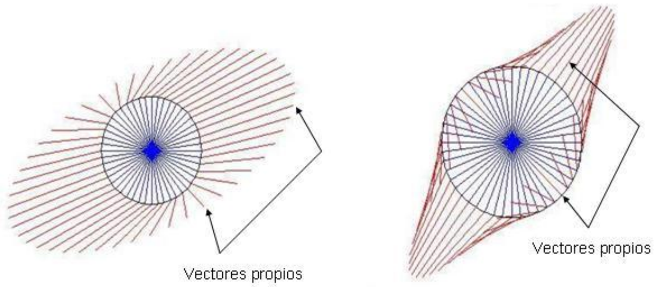

Figura 2: Eigenimágenes de dos matrices con valores propios reales distintos

Otra forma gráfica conocida para ilustrar valores y vectores propios de una matriz real de 2 x 2 es el de las “agujas del reloj”, como lo describen Jhonson & Kroschel (1998). Para una matriz real de 2 x 2, se grafica simultáneamente un vector normalizado x = [cos θ, sen θ] con su respectiva imagen Ax, pero a diferencia de una eigenimagen, ambos desde el origen. Matlab tiene incorporado un programa que abre una ventana interactiva que permite, con la experimentación de este tipo de gráficas, la exploración y el descubrimiento de ciertos patrones. Este programa permite de manera dinámica que al variar θ de 0 a 2π los vectores x se muevan describiendo un círculo unitario mientras que Ax lo hace simultáneamente describiendo una elipse. Simplemente tecleando *eigshow* (Moler, 2004) se realiza esta demostración gráfica para un conjunto de matrices que por default tiene incorporada, o bien, tecleando *eigshow(A)* se ejecuta para la matriz A especificada.

Inicialmente, eigshow grafica el vector unitario x = [0,1]’ además de Ax y el usuario con el mouse puede hacer que x se desplace alrededor del círculo unitario (en color verde). Al mover x, al mismo tiempo la pantalla muestra a Ax también en movimiento (en color azul). Las tres gráficas de la Figura 3 muestran los pasos intermedios de este movimiento para A= $\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$.

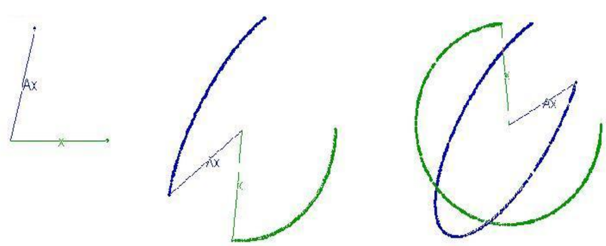

Figura 3: eigshow

Cuando en la gráfica vemos que x y Ax están alineados es porque en ese momento Ax =λx y en consecuencia, x es vector propio de A asociado al valor propio λ. Dado que x es unitario, la longitud de Ax es |λ| y el signo de λ dependerá de la relación entre las direcciones de los vectores x y Ax.

A continuación, presentamos la propuesta didáctica resumida en dos actividades para que el alumno realice en laboratorio. Las conjeturas formuladas por los estudiantes sobre la base de sus observaciones de la geometría de la situación, podrán ser contrastadas con cálculos utilizando otros comandos del Matlab.

Actividad para los alumnos:
Para la exploración geométrica de valores y vectores propios deberás implementar en Matlab básicamente dos funciones: *eigshow* (función propia del Matlab) y *eigenimagen* (función creada por la cátedra).

a) Teclea *eigshow* y experimenta para las siguientes matrices
$\begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5/4 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
seleccionadas de la lista que aparece en la parte superior de la ventana gráfica. Analiza detenidamente las órbitas descriptas por cada matriz y responde:

i) Identifica vectores propios. En función de esto, determina si la matriz tiene valores propios reales distintos, reales iguales o complejos, sus multiplicidades algebraica y geométrica.
ii) Da una estimación de los valores propios y vectores propios basándote en la gráfica.
iii) Usa Matlab para calcular los valores y vectores propios de cada matriz y compara estos resultados con los valores y vectores propios que estimaste gráficamente.
iv) ¿Qué se observa cuando la matriz es no invertible?
v) ¿Qué se observa cuando la matriz es simétrica?

b) Tipea eigenimagen(A), donde A es cualquier matriz de la lista dada en el item (a). Analiza cada gráfica obtenida y a través de esta ella responde las mismas preguntas del item (a). Realiza un informe por escrito, en el que analices la coherencia entre estos dos tipos de representaciones visuales y los conceptos teóricos relacionados.

Para que el lector de este trabajo pueda tener una visión más clara del uso de estas representaciones en otros ejemplos además de los mostrados en figuras anteriores, elegimos matrices con características especiales que seleccionamos de la actividad 1 para presentarles la aplicación de **eigenimagen** y **eigshow** con algunos comentarios que surgen del análisis de una comparación.

La matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz de rotación en sentido contrario a las agujas del reloj de un ángulo recto, por lo tanto el efecto de multiplicar la matriz por un vector unitario será la rotación del vector en un ángulo de $\pi/2$ sin cambiar su longitud. Así nunca se obtendrán vectores paralelos lo que significa entonces que la matriz tiene valores propios complejos. Esto se refleja en la Figura 4 donde a la izquierda (eigenimagen) se observa la ausencia de vectores Ax paralelos a x y a la derecha (eigshow) se puede ver que, durante todo el movimiento el ángulo entre x y Ax es constante y de $\pi/2$ y las imágenes Ax son de longitud uno.

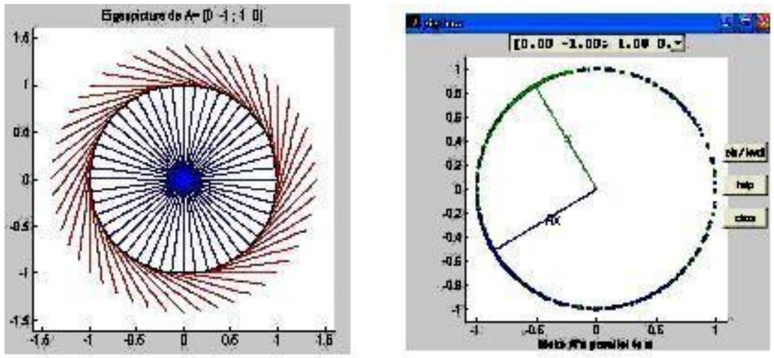

Figura 4: valores propios complejos

La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es simétrica y sus valores propios son 1 y 2. En la Figura 5, eigenimagen (izquierda) muestra claramente la presencia de vectores propios sobre los ejes coordenados: un vector propio es el (1,0) asociado a λ_1=1 (que es la longitud de Ax) y el otro vector propio es (0,1) asociado a λ_2=2 (ya que 2 es la longitud de Ax). En el gráfico de eigshow (derecha) sólo mostramos el momento donde x = (0,1) y Ax están alineados. En particular, elegimos esta matriz simétrica para observar que para esta clase de matrices los vectores propios en una eigenimagen se ubican en el eje menor y el eje mayor de la elipse y en un eigshow las imágenes Ax correspondientes a vectores propios coinciden con los ejes.

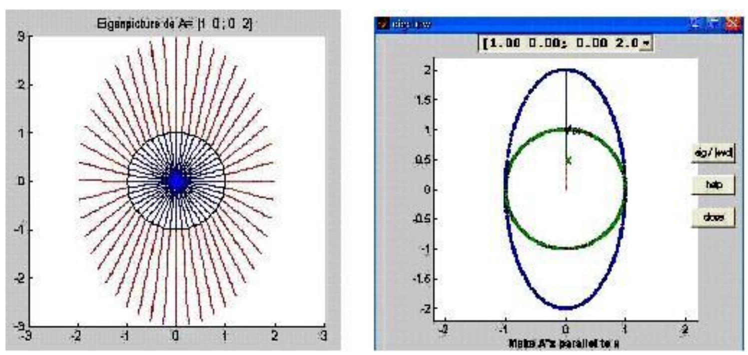

Figura 5: eigenimagen y eigshow de una matriz simétrica

La Figura 6 corresponde a la matriz $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ que tiene valores propios λ_1=0 y λ_2=3, lo que indica el valor propio nulo que la matriz no es invertible. Por otro lado, observamos en particular que su rango es uno.

Los vectores propios opuestos de λ_2=3 son visibles en el gráfico de la izquierda de la Figura 6 en el segundo y cuarto cuadrante y los vectores no nulos Ax son todos paralelos entre si (más específicamente múltiplos del vector (2,-1)) y donde la elipse toca a la circunferencia están los vectores propios opuestos de λ_1=0, justamente porque si x es vector propio asociado a λ_1=0, el vector Ax=0.

En el gráfico de la derecha se observa un momento del movimiento en el que mientras x gira alrededor de la circunferencia, Ax permanece siempre moviéndose en una misma recta, dicha recta será el espacio columna de la matriz. Cuando x pasa por esta recta es cuando nos encontramos con los vectores propios x de λ_2=3 y cuando Ax coincide con el origen es porque ese x es vector propio de λ_1=0.

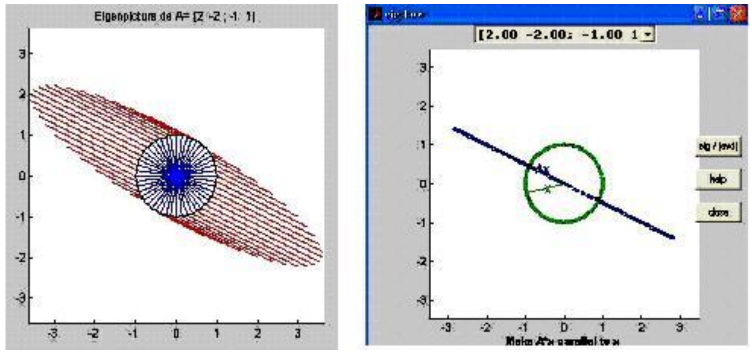

Figura 6: un valor propio cero

La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene dos valores propios repetidos iguales a 1. Con esta matriz queremos mostrar en la Figura 7 que sólo se observan (en el gráfico de la izquierda) dos vectores propios opuestos sobre el eje x, es decir, el espacio generado por λ=1 es el generado por (1,0). Análogamente en el gráfico de la derecha, se registra el momento en que x = (-1,0) coincide con Ax, lo mismo ocurrirá cuando x = (0,1).

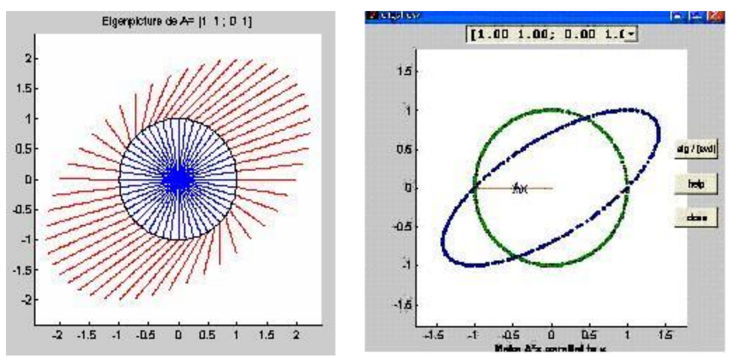

Figura 7: valores propios repetidos

Por último, la Figura 8 corresponde a la matriz $\begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$ que representa la composición de una simetría con respecto al origen (rotación de un ángulo π) y una compresión de factor 1/3. Los valores propios de esta matriz son iguales y su valor es λ= -1/3. De acuerdo al eigenimagen de la izquierda, todo vector es vector propio de la matriz y esto se observa porque todos los segmentos de x y Ax están alineados, además puede notarse la superposición de los colores azul de x con el rojo de Ax (hasta la tercera parte de x) indicando la magnitud y el signo del propio negativo. La misma conclusión tenemos al observar en el eigshow de la derecha que muestra cuando x y Ax son paralelos de direcciones opuestas, situación que ocurrió durante todo el movimiento de x. Además se puede notar que la trayectoria de Ax es una circunferencia de radio 1/3.

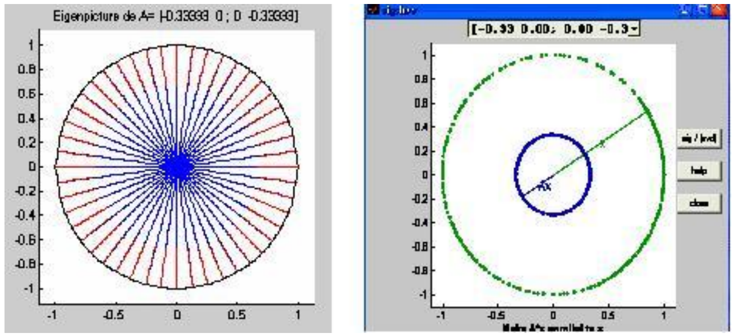

Figura 8: valor propio negativo con multiplicidad geométrica 2

Conclusiones

La aplicación de herramientas tecnológicas en los cursos de Algebra Lineal permite al estudiante experimentar con los objetos matemáticos, hacer conjeturas y descubrir o verificar propiedades, lo cual refuerza la comprensión de los conceptos e incentiva la creatividad.

Con el conjunto de actividades propuestas en este trabajo, se espera orientar al alumno para interpretar y afianzar el concepto del problema de valores propios en el plano desde el punto de vista geométrico y a la reflexión, exploración y obtención de resultados y conclusiones a partir de dos representaciones gráficas conocidas como eigenimágenes y las agujas del reloj (comando eigshow de Matlab).

Con la implementación de la propuesta, se tratarán de establecer indicadores que relacionen los resultados de aprendizaje con la utilización de los recursos visuales que se elaboraron para tal fin a través del Matlab y se derivarán pautas para el diseño e implementación de nuevas propuestas didácticas que busquen optimizar el ejercicio de la docencia en las clases de matemática.

Referencias Bibliográficas

Álvarez, I. & Guasch, T. (2006) Diseño de estrategias interactivas para la construcción de conocimiento profesional en entornos virtuales de enseñanza aprendizaje. *RED Revista de Educación a Distancia.* Núm. 14. España.

Castro, E. & Castro, E. (1997) E. Representaciones y modelización. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* pp 95-124 ,ICE/ Horsori.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics* 24 , pp. 333-344.

Dreyfus T. (1992). Imagery and Reasoning in Mathematics and Mathematics Education (*ICME-7 Selected Lectures*, 107-123, Les Presses de l'Université Laval, 1994).

Dubal, R. (1999a). L'Apprendimento in matematica richiede un funzionamiento cognitivo specifico? *La Matematica e la suaDidattica*, 1, pp. 17-42.

Dubal, R. (1999b). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basics issues for learning. *Actas del PME 23*, pp. 3-26

García Barneto, A. y Gil Martín, M. (2006). Entornos constructivistas de aprendizaje basados en simulaciones informáticas. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 5, Núm. 2.

Johnson Laird, P. (1996). Images, models and propositional representations. En *Model of visuospatial cognitionm* Cap. 3, New York.

Johnson, C. & Kroschel, B. (1998) Clock Hands Pictures for 2 x 2 Real Matrices. *The College Mathematics Journal* , 29, pp. 148- 150.

Kosslyn, S. M. (1980). Image and mind. *Harvard University Press*, Cambridge, Mass.

Macías Ferrer, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, Núm. 42/4.

Moler, Cleve. (2004) Numerical computing with Matlab. *The MathWork*.

Otero, M. , Moreira, M. & Greca, I. (2002). El uso de imágenes en textos de física para la enseñanza secundaria y universitaria. *Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias*, Porto Alegre, Brasil.

Schonefeld, Steven. (1996) Eigenpictures: Picturing the Eigenvector Problem. *The College Mathematics Journal* 26, pp. 316- 319.

Villagra, M. A. (1999) Imagen y enseñanza: Una relación conflictiva. Consultado en http://www.uned.es/ntedu/espanol/master/primero/modulos/teoria-de-la-representacion/leccolab.htm